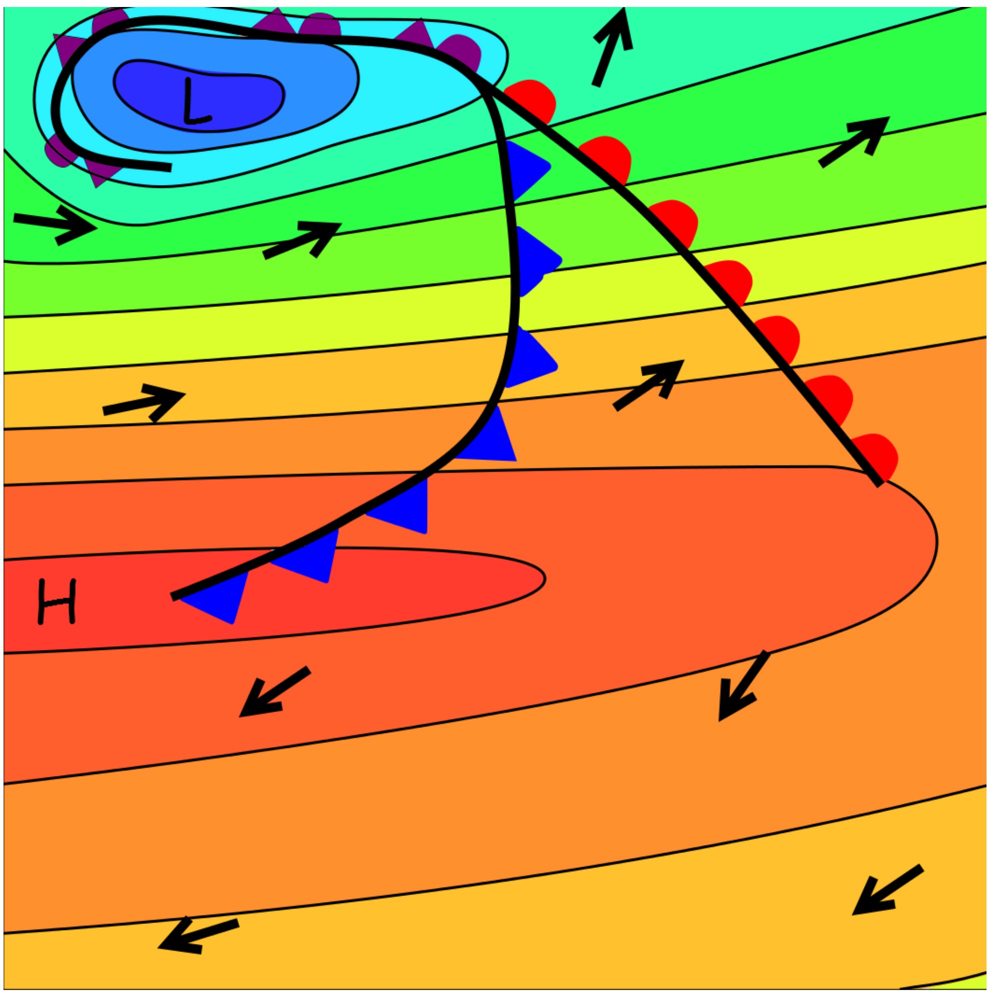
Allgemeine Zirkulation in der Atmosphäre der Erde

Dr. Pascal Frèrebeau

4. Dezember 2014



Inhaltsverzeichnis

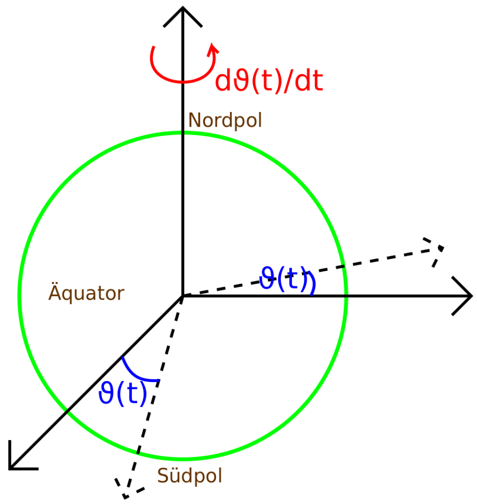


Abbildung 1:
Bezugssystem in der Erde verankert (gestrichelt) versus Bezugssystem im Mittelpunkt der Erde zentriert, das die Erdrotation nicht mitmacht (voll). Das zweite wird bei der Beschreibung der allgemeinen Zirkulation als Inertialsystem betrachtet. $\theta(t)$ *ist der Rotationswinkel, der die Position vom rotierenden Bezugssystem als Funktion vom Inertialsystem angibt.* $\frac{d\theta(t)}{dt}$ *ist die Winkelgeschwindigkeit vom rotierenden Bezugssystem bzw. der Erde.*

1 Herleitung der Bewegungsgleichung

1.1 Definition des Inertialsystems

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem Körper, auf die keine Kraft ausgeübt wird, sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Ein Inertialsystem dreht sich nicht und beschleunigt nicht. Die in der Praxis als Inertialsysteme betrachteten Bezugssysteme sind keine strengen Inertialsysteme, aber sie können für die Lösung eines bestimmten Problems approximativ als solche angenommen werden.

Zum Beispiel kann die Erdoberfläche für Bewegungen, die in einer Zeitskala von mehreren Sekunden stattfinden, als Inertialsystem betrachtet werden, jedoch nicht wenn ein ganzer Tag betrachtet wird. Im ersten Fall ist die Erdrotation vernachlässigbar, während im zweiten Fall die Erde während der Beobachtungszeit eine komplette Drehung um sich selbst vollzogen hat. Die meteorologischen Vorgänge, die für die allgemeine Zirkulation der Luft relevant sind, dauern mehrere Stunden bis mehrere Tage. Ein Bezugssystem, das in der Erde verankert ist, kann für diese Anwendung nicht als Inertialsystem betrachtet werden. Dagegen kann ein System, das im Mittelpunkt der Erde zentriert ist und die Erdrotation nicht mitmacht, als Inertialsystem angenommen werden (siehe Abbildung 1). Eigentlich dreht sich dieses Bezugssystem um die Sonne, aber langsam genug (Periode von einem Jahr) für unsere Anwendung. Wenn Bewegungen, die sich über mehrere Monate oder mehr erstrecken, beschrieben werden müssten, müsste ein Bezugssystem in der Sonne zentriert, das die Sonnenrotation nicht mitmacht, als Inertialsystem genommen werden. Dieses System dreht sich eigentlich auch, da die Sonne sich um das Zentrum unserer Galaxie dreht, allerdings noch mal viel langsamer. Etc...

1.2 Das 2. Newtonsche Gesetz

Die Zirkulation der Luft in der Atmosphäre basiert auf dem 2. Newtonschen Gesetz. Dieses Gesetz besagt, dass in einem Inertialsystem die Beschleunigung eines Körpers in eine Richtung gleich der

Komponente der Resultante aller auf ihn ausgeübten Kräfte in dieser Richtung dividiert durch seine Masse ist:

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} = m\overrightarrow{a} \tag{1}$$

wobei $\overrightarrow{F_i}$ die i-te Kraft ist (von insgesamt N), die auf den Körper ausgeübt wird. m ist seine Masse und $\overrightarrow{a}$ seine Beschleunigung. Achtung: da Gleichung (1) nur in einem Inertialsystem angewendet werden kann, muss ein Bezugssystem gewählt werden, das die Erdrotation nicht mitmacht. Am einfachsten im Mittelpunkt der Erde zentriert (siehe Abbildung 1).

Die Körper, die in der Erdatmosphäre betrachtet werden, sind hinreichend klein genommene Luftteilchen. Für die Theorie werden sie sogar als „unendlich klein“ genommen (man spricht von Luftteilchenelementen). Wenn die Masse eines solchen Luftteilchens d^3m und die i-te darauf ausgeübte Kraft $d^3\overrightarrow{F_i}$ geschrieben werden (wobei das d^3 darauf hinweist, dass die drei Dimensionen des Luftteilchens unendlich klein sind), gilt im Inertialsystem:

$$\sum_{i=1}^{N} d^3\overrightarrow{F_i} = d^3m\overrightarrow{a} \tag{2}$$

1.3 Liste aller Kräfte

Auf ein Luftteilchen werden folgende Kräfte ausgeübt.

1.3.1 Die Gravitation

Die Gravitation ist eine Anziehungskraft, die zwischen allen Körpern stattfindet. Wenn zwei Körper vorhanden sind (K) und (K') mit den Massen m und m', lautet die von (K') auf (K) ausgeübte Kraft:

$$\overrightarrow{F_G} = G\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{e} \tag{3}$$

wobei G die Gravitationskonstante ($6.67384 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg.s^2}$), r der Abstand zwischen den beiden Körpern und $\overrightarrow{e}$ der Einheitsvektor von (K) bis (K') sind. Die von (K) auf (K') ausgeübte Kraft lautet:

$$\overrightarrow{F'_G} = -G\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{e} \tag{4}$$

In der Erdatmosphäre wird folgendermaßen von der Erde auf ein Luftteilchen mit einer Masse d^3m die Gravitationskraft:

$$d^3\overrightarrow{F_g} = -G\frac{Md^3m}{(R+z)^2}\overrightarrow{k} \tag{5}$$

ausgeübt, wobei $M = 5.9736 \times 10^{24}$ kg die Erdmasse, $R = 6.371 \times 10^3$ km der Erdradius, z die Höhe des Luftteilchens über der Erdoberfläche und $\overrightarrow{k}$ der Einheitsvektor senkrecht zur Erdoberfläche nach oben gerichtet sind. Aus Gleichung (2) folgt, dass die entsprechende Beschleunigung (Gravitationsbeschleunigung)

$$\overrightarrow{a_g} = -G\frac{M}{(R+z)^2}\overrightarrow{k} \tag{6}$$

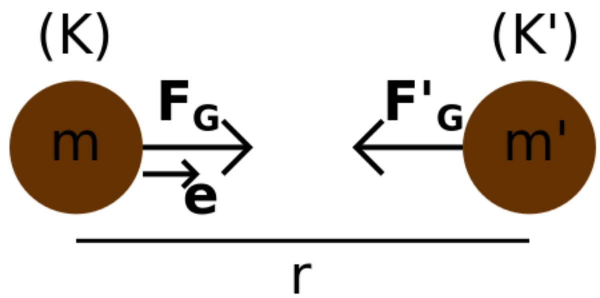


Abbildung 2:
Schematische Darstellung der zwischen zwei Körpern (K) und (K') auftretenden Gravitationskräften.

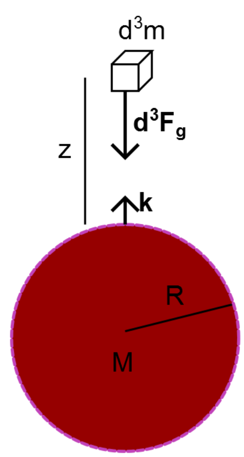


Abbildung 3:
Schematische Darstellung der von der Erde auf ein Luftteilchen mit der Masse d^3m *ausgeübte Gravitationskraft.*

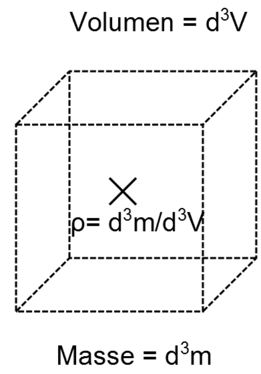


Abbildung 4:
Graphische Darstellung der Dichte als kontinuirliche Funktion in einem Medium.

lautet. Da $z \ll R$, wird z meistens weggelassen. Auch werden die von anderen Körpern als der Erde verursachten Gravitationskräfte (wie die Gravitationskräfte zwischen den einzelnen Luftteilchen) vernachlässigt. So wird angenommen, dass der Betrag der Gravitationsbescheunigung gleich

$$g = G\frac{M}{R^2} \approx 9.82\,\mathrm{m}.s^{-2} \tag{7}$$

ist. Von nun an schreiben wir:

$$d^3\overrightarrow{F_g} = -gd^3m\overrightarrow{k} \tag{8}$$

und

$$\overrightarrow{a_g} = -g\overrightarrow{k} \tag{9}$$

1.3.2 Die Druckkraft

Dichte Die Dichte eines Körpers (ρ) ist seine Masse (M) geteilt durch sein Volumen (V):

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{10}$$

In einem Medium (zum Beispiel die Atmosphäre der Erde) wird die Dichte üblicherweise als kontinuierliche Funktion in jedem Punkt definiert. Um einen beliebigen Punkt kann man sich ein elementares Volumen d^3V vorstellen (z.B. ein Luftteilchen). Dieses Volumen enthält die Masse d^3m. In diesem Punkt beträgt die Dichte:

$$\rho = \frac{d^3m}{d^3V} \tag{11}$$

Die Einheit der Dichte im SI-Einheitensystem ist kg.m^{-3}.

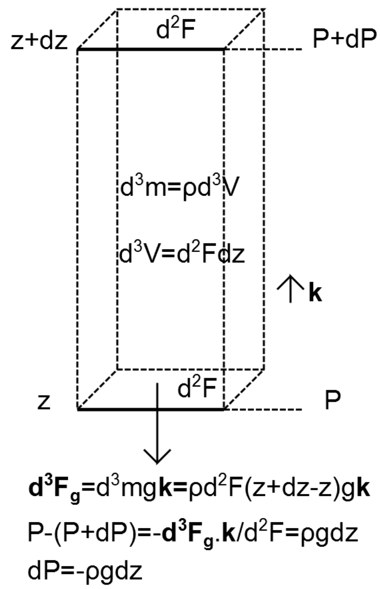


Abbildung 5:
Graphische Darstellung zur Erläuterung der Druckvariation mit der Höhe.

Druck Der Druck (P) ist der Widerstand, den ein Medium auf jeden Körper ausübt, mit dem es in Berührung steht. Er ist eine Kraft pro Flächeneinheit. In der Erdatmosphäre entsteht der Druck durch die Gewichtskraft der Luftsäule über dem betrachteten Punkt. Er hängt deshalb hauptsächlich von der Höhe ab. Die Variation des Druckes zwischen zwei naheliegenden Niveaus z und $z + dz$ lautet:

$$dP = -\rho g dz \tag{12}$$

Das Minuszeichen ist vorhanden, weil Druck und Höhe in umgekehrter Richtung variieren.

Die Einheit des Drucks im SI-Einheitensystem ist Pa. Meistens wird stattdessen hPa verwendet. Abbildung 5 verdeutlicht die Druckzunahme mit der Tiefe. d^2F ist dabei die obere und untere Fläche an der Grenze des Volumens d^3V. P ist der Druck im Niveau z und $P + dP$ ist der Druck im Niveau $z + dz$. d^3m ist die Masse des Volumens d^3V, ρ ist seine Dichte (als konstant innerhalb des Volumenelements angenommen). $d^3\overrightarrow{F_g}$, die auf d^3V ausgeübte Gravitationskraft, ist auch die Gewichtskraft, die d^3V auf einen Körper unter sich ausübt.

Die Druckkraft, die ein Körper (K) auf ein zu seinem Rand (geschlossener Fläche (∂K)) gehörendes Flächenelement d^2F um den Punkt (x, y, z) ausübt, ist gleich:

$$d^2\overrightarrow{F'_p}(x, y, z) = P_{in}(x, y, z)\,\overrightarrow{n}(x, y, z)\,d^2F \tag{13}$$

wobei $d^2\overrightarrow{F'_p}(x, y, z)$die von (K) auf d^2F ausgeübte Druckkraft, $P_{in}(x, y, z)$ der Druck am Punkt (x, y, z) auf der inneren Seite des Rands (∂K) und $\overrightarrow{n}(x, y, z)$ der Einheitsvektor senkrecht zur Fläche um (∂K) am Punkt (x, y, z) sind.

Die Druckkraft, die die Umgebung auf ein zum Rand von (K) gehörendes Flächenelement d^2F um den Punkt (x, y, z) ausübt, ist gleich:

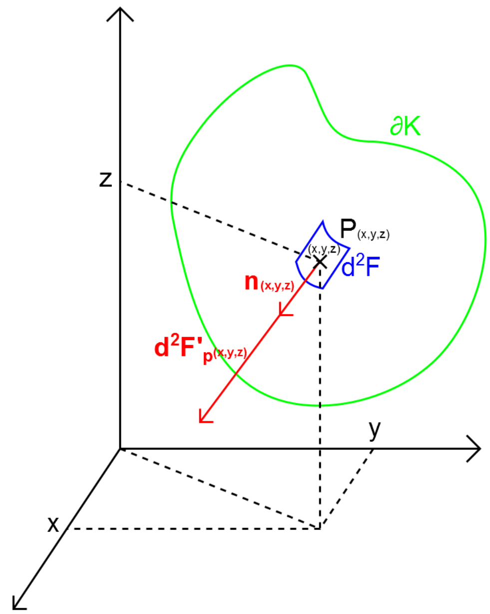


Abbildung 6:
Graphische Darstellung zur Definition der Druckkraft.

$$d^2\overrightarrow{F_p}\left(x,y,z\right)=-P_{out}\left(x,y,z\right)\overrightarrow{n}\left(x,y,z\right)d^2F \tag{14}$$

wobei $d^2\overrightarrow{F_p}\left(x,y,z\right)$die von der Umgebung auf d^2F ausgeübte Druckkraft und $P_{out}\left(x,y,z\right)$ der Druck am Punkt $\left(x,y,z\right)$ auf der außeren Seite des Rands (∂K) sind.

Die gesamte Druckkraft, die die Umgebung auf (K) ausübt, ist die Summe aller elementaren Kräfte $d^2\overrightarrow{F_p}\left(x,y,z\right)$ über die ganze geschlossene Fläche (∂K):

$$\overrightarrow{F_p}=-\oiint_{(\partial K)}P_{out}\left(x,y,z\right)\overrightarrow{n}\left(x,y,z\right)d^2F \tag{15}$$

Wenn der Druck eine kontinuirliche Funktion ist, wie das in der Erdatmosphäre der Fall ist, gilt: $P_{in}\left(x,y,z\right)=P_{out}\left(x,y,z\right)=P\left(x,y,z\right)$. In diesem Fall kann man schreiben:

$$\overrightarrow{F_p}=-\oiint_{(\partial K)}P\left(x,y,z\right)\overrightarrow{n}\left(x,y,z\right)d^2F \tag{16}$$

Eine Folgerung des gaußschen Integralsatzes lautet:

$$\iiint_V\left(\overrightarrow{\nabla}f\left(x,y,z\right)\right)d^3V=\oiint_{(\partial V)}f\left(x,y,z\right)\overrightarrow{n}\left(x,y,z\right)d^2F \tag{17}$$

wobei $f\left(x,y,z\right)$ irgendeine skalare dreidimensionale Funktion, V ein Volumen und ∂V der Rand dieses Volumens sind.

Demzufolge kann man die gesamte Druckkraft, die die Umgebung auf (K) ausübt, auch folgendermaßen schreiben:

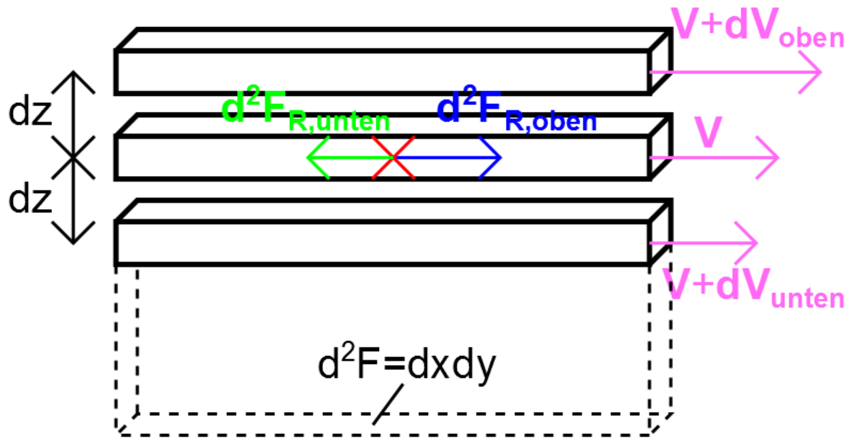


Abbildung 7:
Schematische Darstellung zu den auftretenden Reibungskräften zwischen Luftteilchen.

$$\overrightarrow{F_p} = -\iiint_{(K)} \left(\overrightarrow{\nabla} P\left(x,y,z\right)\right) d^3V \tag{18}$$

Wenn (K) jetzt ein Luftpartikel ist, kann es als Elementarvolumen (d^3V) betrachtet werden, so dass das Integral entfällt. Die auf ein Luftteilchen ausgeübte Druckkraft lautet:

$$d^3\overrightarrow{F_p} = -\left(\overrightarrow{\nabla} P\left(x,y,z\right)\right) d^3V \tag{19}$$

1.3.3 Die Reibungskraft

Wenn nachbare Luftteilchen eine unterschiedliche Geschwindigkeit haben, findet Reibung zwischen ihnen statt. Auch findet Reibung zwischen den untersten Luftteilchen und dem festen Boden statt, sobald diese Teilchen eine Geschwindigkeit haben, die nicht gleich null ist.

Wenn in einem Fluid zwei dünne Schichten (Dicke Δx) wegen unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander gleiten (Berührungsfläche δF), übt die erste folgende Reibungskraft auf die zweite:

$$\delta\overrightarrow{F_{R,1.\to 2.}} = \eta \delta F \frac{\Delta\overrightarrow{V}}{\Delta x} \tag{20}$$

wobei η die dynamische Viskosität des Fluids ist und $\Delta\overrightarrow{V}$ gleich $\overrightarrow{V_{1.}} - \overrightarrow{V_{2.}}$ ist mit $\overrightarrow{V_{1.}}$ der Geschwindigkeit der 1. Schicht und $\overrightarrow{V_{2.}}$ der Geschwindigkeit der 2. Schicht. Abbildung 7 zeigt den Spezialfall von drei horizontal aneinander gleitenden elementaren Schichten (Dicke dz, Berührungsfläche $d^2F = dxdy$).

Nach Gleichung (20) übt in dieser Konfiguration die obere Schicht folgende Reibungskraft auf die mittlere:

$$d^2\overrightarrow{F_{R,oben}}\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right) = \eta\left(x,y,z\right) dxdy \frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right) \tag{21}$$

Dabei wurde $\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}$ als konstant zwischen z und $z+dz$ und gleich $\frac{\overrightarrow{V}+d\overrightarrow{V_{oben}}-\overrightarrow{V}}{dz}$ genommen, was sinnvoll ist, weil dz eine elementare Länge ist.

Nach Gleichung (20) übt in dieser Konfiguration die untere Schicht folgende Kraft auf die mittlere:

$$d^2\overrightarrow{F_{R,unten}}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right)=-\eta\left(x,y,z\right)dxdy\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right) \tag{22}$$

Die Taylorsche Formel sagt uns, dass eine N mal ableitbare Funktion $f\left(x\right)$ auf $I\subset\mathbb{R}$ in der Nähe von $x_0\in I$ folgendermaßen genähert werden kann:

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{1}{N!}\frac{d^Nf}{dx^N}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^N \tag{23}$$

Sei $f=\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}$ und $N=1$. Es gilt:

$$\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right)=\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z\right)+\frac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\frac{dz}{2} \tag{24}$$

und

$$\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right)=\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z\right)-\frac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\frac{dz}{2} \tag{25}$$

Die resultierende auf die mittlere Schicht ausgeübte Reibungskraft ist die Summe aus der von der oberen und der von der unteren Schicht ausgeübten Kräften:

$$d^3\overrightarrow{F_R}\left(x,y,z\right)=d^2\overrightarrow{F_{R,oben}}\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right)+d^2\overrightarrow{F_{R,unten}}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right) \tag{26}$$

$$\begin{aligned} d^3\overrightarrow{F_R}\left(x,y,z\right) &= \eta\left(x,y,z\right)dxdy\left[\tfrac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z\right)+\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\tfrac{dz}{2}\right] \\ &\quad -\eta\left(x,y,z\right)dxdy\left[\tfrac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z\right)-\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\tfrac{dz}{2}\right] \end{aligned} \tag{27}$$

$$d^3\overrightarrow{F_R}\left(x,y,z\right)=\eta\left(x,y,z\right)dxdydz\frac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right) \tag{28}$$

Dieses Ergebnis gilt nur für den Spezialfall von einer horizontalen Strömung. Es lässt sich aber für eine beliebige Strömung verallgemeinen:

$$\begin{aligned} d^3\overrightarrow{F_R}\left(x,y,z\right) &= \eta\left(x,y,z\right)dxdydz\Delta\overrightarrow{V}\left(x,y,z\right) \\ &= \eta\left(x,y,z\right)dxdydz\left[\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial x^2}\left(x,y,z\right)+\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial y^2}\left(x,y,z\right)+\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\right] \end{aligned} \tag{29}$$

Mit $\nu=\frac{\eta}{\rho}$ der kinematischen Viskosität:

$$d^3\overrightarrow{F_R}\left(x,y,z\right)=\nu\left(x,y,z\right)d^3m\Delta\overrightarrow{V}\left(x,y,z\right) \tag{30}$$

1.4 Ausdruck der Bewegungsgleichung im Inertialsystem

Von nun an berücksichtigen wir auch die zeitliche Abhängigkeit der bisher eingeführten dreidimensionalen Felder. Jedoch beziehen sich die Operatore $\overrightarrow{\nabla}$ und Δ weiterhin nur auf die drei Raumkoordinate, nicht auf die Zeit.

Aus Gleichungen (2), (8), (19) und (30) folgt:

$$d^3\overrightarrow{F_g}(x,y,z,t) + d^3\overrightarrow{F_p}(x,y,z,t) + d^3\overrightarrow{F_R}(x,y,z,t) = d^3m\overrightarrow{a}(x,y,z,t) \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&-gd^3m\overrightarrow{k}(x,y,z,t) - \left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right)d^3V(x,y,z,t) + \nu(x,y,z,t)\,d^3m\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\\ &= d^3m\overrightarrow{a}(x,y,z,t)\end{aligned} \tag{32}$$

Dividiert man Gleichung (32) durch die Masse des Luftteilchens d^3m), erhält man:

$$\overrightarrow{a}(x,y,z,t) = -g\overrightarrow{k}(x,y,z,t) - \frac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right) + \nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t) \tag{33}$$

Dabei ist die Beschleunigung $\overrightarrow{a}(x,y,z,t)$ die totale Ableitung der Geschwindigkeit $\overrightarrow{V}(x,y,z,t)$:

$$\overrightarrow{a}(x,y,z,t) = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}(x,y,z,t) = \frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}(x,y,z,t) + \overrightarrow{V}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}(x,y,z,t) \tag{34}$$

so dass Gleichung (33) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}(x,y,z,t) \quad = \quad & -\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}(x,y,z,t) - g\overrightarrow{k}(x,y,z,t)\\ & -\tfrac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right) + \nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\end{aligned} \tag{35}$$

Folgende Terme treten in Gleichung (35) auf:
$\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}(x,y,z,t)$ ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit,
$-\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}(x,y,z,t)$ ist die Advektion der Geschwindigkeit,
$-g\overrightarrow{k}(x,y,z,t)$ ist die Gravitationsbeschleunigung,
$-\frac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right)$ ist die Beschleunigung, die vom Druckgradient verursacht wird,
$\nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t)$ ist die Beschleunigung, die von der Reibung verursacht wird.

1.5 Ausdruck der Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem

Um die Bewebung der Luft in der Erdatmosphäre zu beschreiben, ist das aber notwendig, die Bewegungsgleichung im in der Erde verankerten Bezugssystem (siehe Abbildung 1) zu schreiben. Wir haben gesehen, dass Gleichungen (1) und (2) in diesem Bezugssystem nicht gültig sind. Jedoch ist es möglich, die Vektorfunktionen von im Inertialsystem herleiteter Gleichung (35) jetzt im rotierenden Bezugssystem zu schreiben.

$\overrightarrow{e'_x}$, $\overrightarrow{e'_y}$ und $\overrightarrow{e_z}$ seien die Einheitsvektore des Inertialsystems, $\overrightarrow{e_x}(t)$, $\overrightarrow{e_y}(t)$ und $\overrightarrow{e_z}$ seien die Einheitsvektore des rotierenden Bezugssystems (siehe Abbildung 8). $\theta(t)$ sei der Rotationswinkel des rotierenden Bezugssystems gegenüber dem Inertialsystem. Es gilt:

$$\overrightarrow{e_x}(t) = \cos\theta(t)\,\overrightarrow{e'_x} + \sin\theta(t)\,\overrightarrow{e'_y} \tag{36}$$

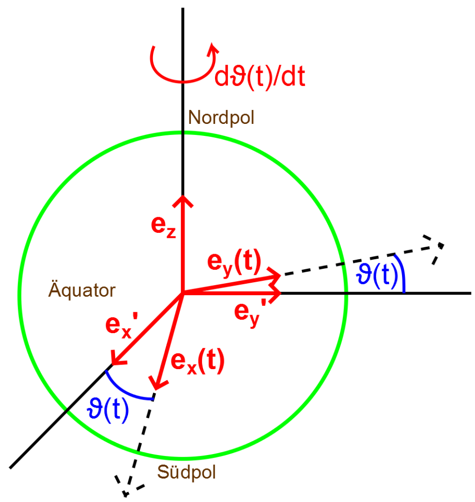


Abbildung 8:
Zur Erläuterung der verwendeten Einheitsvektore.

und

$$\overrightarrow{e_y}(t) = -\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e'_x} + \cos\theta(t)\,\overrightarrow{e'_y} \tag{37}$$

$\overrightarrow{e_x}(t)$ und $\overrightarrow{e_y}(t)$hängen von t ab, weil sie gegenüber dem Inertialsystem rotieren. Ihre Ableitung im Inertialsystem ist deshalb nicht gleich 0, sondern es gilt:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}(t)\right|_{\mathrm{In}} = -\frac{d\theta}{dt}(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e'_x} + \frac{d\theta}{dt}(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{e'_y} = \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) \tag{38}$$

sowie

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}(t)\right|_{\mathrm{In}} = -\frac{d\theta}{dt}(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{e'_x} - \frac{d\theta}{dt}(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e'_y} = -\frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) \tag{39}$$

Hier sei entschieden, die Abhängigkeit von t von $\overrightarrow{e'_x}$ und $\overrightarrow{e'_y}$ nicht zu notieren, obwohl diese beiden Einheitsvektore gegenüber dem rotierenden Bezugssystem ebenfalls rotieren. Man kann auch schreiben:

$$\overrightarrow{e'_x} = \cos\theta(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) - \sin\theta(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) \tag{40}$$

$$\overrightarrow{e'_y} = \sin\theta(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) + \cos\theta(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) \tag{41}$$

Und es gilt:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e'_x}}{dt}\right|_{\mathrm{Rot}} = -\frac{d\theta}{dt}(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) - \frac{d\theta}{dt}(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) = -\frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e'_y} \tag{42}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e'_y}}{dt}\right|_{\mathrm{Rot}} = \frac{d\theta}{dt}(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) - \frac{d\theta}{dt}(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e'_x} \tag{43}$$

Die Beziehung zwischen der totalen Ableitung einer vektoriellen Funtion $\overrightarrow{X}(x,y,z,t)$ im Inertialsystem und ihrer totalen Ableitung im rotierenden System lautet:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\right|_{\mathrm{In}} = \left.\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\right|_{\mathrm{Rot}} + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z,t) \tag{44}$$

wobei $\left.\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\right|_{\mathrm{In}}$ die totale Ableitung von $\overrightarrow{X}(x,y,z,t)$ im Inertialsystem, $\left.\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\right|_{\mathrm{Rot}}$ ihre totale Ableitung im rotierenden System und $\wedge$ das Vektorprodukt sind.
Die räumlichen Ableitungen einer vektoriellen Funtion $\overrightarrow{X}(x,y,z,t)$ hängen nicht vom Bezugssystem ab. Aus diesem Grund gilt:

$$\left.\triangle\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right|_{\mathrm{In}} = \left.\triangle\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right|_{\mathrm{Rot}} \tag{45}$$

Auch hängt der räumliche Gradient einer skalaren Funktion nicht vom verwendeten Bezugssystem.
Von nun an ist

$$\overrightarrow{X'}(x',y',z,t) = X'(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_x} + Y'(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_y} + Z'(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e_z} \tag{46}$$

der Positionsvektor im Inertialsystem zur Zeit t des Luftteilchens, das sich zu dieser Zeit bei (x',y',z) befindet (x', y' und z sind dabei die Koordinaten des Luftteilchen im Inertialsystem zur Zeit t).

$$\overrightarrow{X}(x,y,z,t) = X(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x}(t) + Y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y}(t) + Z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z} \tag{47}$$

ist der Positionsvektor des selben Luftteilchens im rotierenden Bezugssystem zur Zeit t (es befindet sich in diesem Bezugssystem zu dieser Zeit bei (x,y,z), x, y und z sind dabei die Koordinaten des Luftteilchen im rotierenden Bezugssystem zur Zeit t).
Die Geschwindigkeit eines Luftteilchens im Inertialsystem wird (im Inertialsystem ausgedrückt) von

$$\overrightarrow{V'_{\mathrm{In}}}(x',y',z,t) = \left.\frac{d\overrightarrow{X'}}{dt}(x',y',z,t)\right|_{\mathrm{In}} = \frac{dX'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_x} + \frac{dY'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_y} + \frac{dZ'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e_z} \tag{48}$$

oder (im rotierenden Bezugssystem ausgedrückt) von

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{\mathrm{In}}}(x,y,z,t) = \left.\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\right|_{\mathrm{In}} &= \frac{dX}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x}(t) + X(x,y,z,t)\left.\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}(t)\right|_{\mathrm{In}} \\ &+ \frac{dY}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y}(t) + Y(x,y,z,t)\left.\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}(t)\right|_{\mathrm{In}} \\ &+ \frac{dZ}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned} \tag{49}$$

das heißt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{\mathrm{In}}}(x,y,z,t) &= \left(\frac{dX}{dt}(x,y,z,t) - \frac{d\theta}{dt}(t)\,Y(x,y,z,t)\right)\overrightarrow{e_x}(t) \\ &+ \left(\frac{d\theta}{dt}(t)\,X(x,y,z,t) + \frac{dY}{dt}(x,y,z,t)\right)\overrightarrow{e_y}(t) + \frac{dZ}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned} \tag{50}$$

gegeben. Die Geschwindigkeit eines Luftteilchens im rotierenden Bezugssystem (im rotierenden Bezugssystem ausgedrückt) lautet:

$$\overrightarrow{V_{\mathrm{Rot}}}(x,y,z,t) = \frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\bigg|_{\mathrm{Rot}} = \frac{dX}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x}(t) + \frac{dY}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y}(t) + \frac{dZ}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z} \tag{51}$$

oder (im Inertialsystem ausgedrückt):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V'_{\mathrm{Rot}}}(x',y',z,t) = \frac{d\overrightarrow{X'}}{dt}(x',y',z,t)\bigg|_{\mathrm{Rot}} &= \tfrac{dX'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_x} + X'(x',y',z,t)\,\frac{d\overrightarrow{e'_x}}{dt}\bigg|_{\mathrm{Rot}} \\ &+\tfrac{dY'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_y} + Y'(x',y',z,t)\,\frac{d\overrightarrow{e'_y}}{dt}\bigg|_{\mathrm{Rot}} \\ &+\tfrac{dZ'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned} \tag{52}$$

das heißt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V'_{\mathrm{Rot}}}(x',y',z,t) &= \left(\tfrac{dX'}{dt}(x',y',z,t) + \tfrac{d\theta}{dt}(t)\,Y'(x',y',z,t)\right)\overrightarrow{e'_x} \\ &+ \left(-\tfrac{d\theta}{dt}(t)\,X'(x',y',z,t) + \tfrac{dY'}{dt}(x',y',z,t)\right)\overrightarrow{e'_y} + \tfrac{dZ'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned} \tag{53}$$

Und nach Gleichung (44) gilt (im Inertialsystem ausgedrückt):

$$\overrightarrow{V'_{\mathrm{In}}}(x',y',z,t) = \overrightarrow{V'_{\mathrm{Rot}}}(x',y',z,t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X'}(x',y',z,t) \tag{54}$$

sowie (im rotierenden Bezugssystem ausgedrückt):

$$\overrightarrow{V_{\mathrm{In}}}(x,y,z,t) = \overrightarrow{V_{\mathrm{Rot}}}(x,y,z,t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z,t) \tag{55}$$

Nach Gleichung (44) gilt (im rotierenden Bezugssystem ausgedrückt) mit $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{V_{In}}$:

$$\frac{d\overrightarrow{V_{\mathrm{In}}}}{dt}(x,y,z,t)\bigg|_{\mathrm{In}} = \frac{d\overrightarrow{V_{\mathrm{In}}}}{dt}(x,y,z,t)\bigg|_{\mathrm{Rot}} + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{V_{\mathrm{In}}}(x,y,z,t) \tag{56}$$

$$\overrightarrow{a_{\mathrm{In}}}(x,y,z,t) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{\mathrm{Rot}}}(x,y,z,t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right)\bigg|_{\mathrm{Rot}} + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{V_{\mathrm{In}}}(x,y,z,t) \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{\mathrm{In}}}(x,y,z,t) &= \overrightarrow{a_{\mathrm{Rot}}}(x,y,z,t) + \tfrac{d^2\theta}{dt^2}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z,t) + \tfrac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\tfrac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\Big|_{\mathrm{Rot}} \\ &+\tfrac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\left[\overrightarrow{V_{\mathrm{Rot}}}(x,y,z,t) + \tfrac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right]\end{aligned} \tag{58}$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = 0$, da die Erdrotation für eine Zeitskala von ein paar Tagen als konstant betrachtet werden kann. Ab jetzt wird auch $\frac{d\theta}{dt}$ statt $\frac{d\theta}{dt}(t)$ geschrieben.

$$\overrightarrow{a_{\mathrm{In}}}(x,y,z,t) = \overrightarrow{a_{\mathrm{Rot}}}(x,y,z,t) + 2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{V_{\mathrm{Rot}}}(x,y,z,t) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{e_z}\wedge\left(\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right) \tag{59}$$

Aus Gleichung (33) (und mit Gleichung 45) wird:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{\text{Rot}}}(x,y,z,t) &= -2\tfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{V_{\text{Rot}}}(x,y,z,t)-\left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{e_z}\wedge\left(\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right)\\ &\quad -g\overrightarrow{k}(x,y,z)-\tfrac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right)+\nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V_{\text{Rot}}}(x,y,z,t)\end{aligned}\tag{60}$$

Durch die Änderung des Bezugssystems sind zwei neue Terme entstanden:
$-2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{V_{\text{Rot}}}(x,y,z,t)$ (Coriolis-Beschleunigung) und
$-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{e_z}\wedge\left(\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right)$ (Zentrifugalbeschleunigung).

NB: Ab hier wird die zeitliche Abhängigkeit von $\overrightarrow{X}(x,y,z,t)$ trivial. Sie wird deshalb weggelassen.

Der Einheitsvektor $\overrightarrow{k}(x,y,z)$ kann als Linearkombination von $\overrightarrow{e_x}(t)$, $\overrightarrow{e_y}(t)$ und $\overrightarrow{e_z}$ geschrieben werden, da $\overrightarrow{k}(x,y,z)=\frac{\overrightarrow{X}(x,y,z)}{\left\|\overrightarrow{X}(x,y,z)\right\|}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{k}\quad(x,y,z) &= \tfrac{X(x,y,z)}{\sqrt{X(x,y,z)^2+Y(x,y,z)^2+Z(x,y,z)^2}}\overrightarrow{e_x}(t)+\tfrac{Y(x,y,z)}{\sqrt{X(x,y,z)^2+Y(x,y,z)^2+Z(x,y,z)^2}}\overrightarrow{e_y}(t)\\ &\quad+\tfrac{Z(x,y,z)}{\sqrt{X(x,y,z)^2+Y(x,y,z)^2+Z(x,y,z)^2}}\overrightarrow{e_z}\end{aligned}\tag{61}$$

Die Zentrifugalbeschleunigung ist gleich:

$$\begin{aligned}-\left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{e_z}\wedge\left(\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z)\right) &= -\left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2\left|\begin{array}{l}0\\0\\1\end{array}\right.\wedge\left[\left|\begin{array}{l}0\\0\\1\end{array}\right.\wedge\left|\begin{array}{l}X(x,y,z)\\Y(x,y,z)\\Z(x,y,z)\end{array}\right.\right]\\ &= \left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2\left|\begin{array}{l}X(x,y,z)\\Y(x,y,z)\\0\end{array}\right.\end{aligned}\tag{62}$$

Sie ist senkrecht zur Erdrotationsachse und zeigt nach außen. Ihr Betrag ist gleich $R\cos\sigma\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\approx\left(7.3\times10^{-5}\,s^{-1}\right)^2\times6.4\times10^6\,\mathrm{m}\approx4.7\times10^{-3}\,\mathrm{m}.s^{-2}$ mit σ der geographischen Breite. Das ist viel kleiner als die anderen vorhanden Beschleunigungen, zum Beispiel die Gravitationsbeschleunigung ($9.82\,\mathrm{m}.s^{-2}$). Üblicherweise wird die Zentrifugalbeschleunigung lediglich als Korrekturfaktor zur Gravitationsbeschleunigung betrachtet. Dabei zeigt die Gravitationsbeschleunigung zum Mittelpunkt der Erde (mit einer hohen Genauigkeit), während die Zentrifugalbeschleunigung senkrecht zur Erdrotationsachse ist. Die Summe aus beiden („korrigierte Gravitationsbeschleunigung“) zeigt nur annähernd zum Mittelpunkt der Erde. Die ab jetzt verwendete Gravitationsbeschleunigung ($\overrightarrow{g}$ geschrieben) sei gleich der Summe der früheren Gravitationsbeschleunigung und der Zentrifugalbeschleunigung:

$$\overrightarrow{g}(x,y,z)=-g\overrightarrow{k}(x,y,z)-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{e_z}\wedge\left(\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z)\right)\tag{63}$$

Aus Gleichung (60) wird nun:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{\text{Rot}}}(x,y,z,t) &= -2\tfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{V_{\text{Rot}}}(x,y,z,t)+\overrightarrow{g}(x,y,z)-\tfrac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right)\\ &\quad+\nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V_{\text{Rot}}}(x,y,z,t)\end{aligned}\tag{64}$$

Ab jetzt verwenden wir ein anderes Bezugssystem (Name: Oberflächensystem): es ist an einem biliebigen Ort auf Erdoberfläche zentriert, die x-Achse zeigt nach Osten, die y-Achse nach Norden und die z-Achse nach oben. Die Einheitsvektore dieses Bezugssystems in der x, y bzw. z-Richtung sind jeweils $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ und $\overrightarrow{k}$. Dieses Bezugssystem bewegt sich nicht gegenüber dem im Mittelpunkt der Erde zentrierten rotierenden Bezugssystem, so dass alle in diesem System geschriebenen Gleichungen (wie Gleichung 64) im Oberflächensystem immer noch gültig sind (nur werden andere Koordinaten verwendet). Ab jetzt sind x, y und z die Koordinaten im Oberflächensystem. Wir lassen auch den Hinweis „Rot", aber sowohl Geschwindigkeit als auch Beschleunigung werden bezüglich des Oberflächensystems angegeben. Der Ausdruck der Bewegungsgleichung in diesem Bezugssystem lautet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}(x,y,z,t) &= -\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}(x,y,z,t)-2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{V}(x,y,z,t)+\overrightarrow{g}(x,y,z)\\ &\quad-\frac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right)+\nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\end{aligned} \tag{65}$$

to be continued...

Literatur

[1] Triplet, J.P., und G. Roche, „Météorologie Générale“ (3ème édition), Météo-France, 1986.

to be continued...